TOP 05

TRACE ET DÉTERMINANT.

Les fichiers TOP sont réservées aux étudiants qui préparent le Top 5. Ils sont plus difficiles et demandent déjà une bonne maîtrise du reste du programme (cours, exercices, TD et méthodes). Même si le contenu de ces exercices dépasse le cadre du programme de ECG2, ils peuvent inspirer une série de questions d'un texte de concours.

Cet exercice concerne le chapitre 06 (Réduction des matrices)[1].

Exercice 1.-
Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit les deux applications suivantes, notées d et tr,

$$\mathrm{d} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad-bc \end{array}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a+d \end{array}.$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appellera $\mathrm{d}(A)$ le *déterminant* de A et $\mathrm{tr}(A)$ sa *trace*.

1. **Propriétés de la trace**.

   a. Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer une base du noyau de tr.

   c. En déduire l'image de tr.

   d. Établir que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

   e. Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.

   f. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace. La réciproque est-elle vraie ?

   g. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A et ${}^tA$ ont la même trace.

2. **À propos du déterminant**.

   a. Calculer $\mathrm{d}(2I)$. En déduire que l'application d n'est pas linéaire.

   b. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Établir la formule : $\mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}(A) \times \mathrm{d}(B)$.

   c. On suppose que P est une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\mathrm{d}(P)$ est non nul.

   d. Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\mathrm{d}(P^{-1}AP) = \mathrm{d}(A)$.

   e. En déduire que deux matrices semblables ont le même déterminant. La réciproque est-elle vraie ?

1. Plusieurs questions de cet exercice sont apparues dans le sujet de ECRICOME 2022

f. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A et ${}^tA$ ont le même déterminant.

3. Dans cette question seulement, on suppose que A est semblable à une matrice diagonale
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$
Montrer que
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A), \qquad \text{et} \qquad \lambda_1\lambda_2 = \mathrm{d}(A).$$

4. Dans toute la suite, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par A dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \mathrm{d}(A)I = 0$
$$f^2(u) = \mathrm{tr}(A)f(u) - \mathrm{d}(A)u.$$

b. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,
$$f^2(u) = \mathrm{tr}(A)f(u) - \mathrm{d}(A)u.$$

c. À l'aide de la question **4.a**, prouver la réciproque à la question **2.c**.

5. Dans cette question seulement, on suppose que A est **non colinéaire à** I. On introduit
$$w = e_1 + e_2.$$

a. (i) Montrer que, s'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $f(e_1) = \lambda_1 e_1$ et $f(e_2) = \lambda_2 e_2$, alors nécessairement $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(ii) Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir simultanément $f(e_1) = \lambda_1 e_1$, $f(e_2) = \lambda_2 e_2$ et $f(w) = \lambda_3 w$, quels que soient les réels λ_1, λ_2 et λ_3.

b. En déduire qu'il existe au moins un vecteur non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

c. En déduire, à l'aide de la question **4.b** l'expression de la matrice M représentant u dans la base $(x, f(x))$.

d. (i) Soit A et A' deux matrices, dont les endomorphismes associés sont notés respectivement f et f'. Rappeler sans preuve une condition nécessaire et suffisante portant sur f et f' pour que A et A' soient semblables.

(ii) Déduire de **4.c** et des informations dont on dispose sur la trace et le déterminant que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$.

Pour que cet exercice soit profitable, il n'est pas recommandé d'utiliser la correction trop tôt. La *recherche* de la solution a beaucoup plus d'intérêt que la solution elle-même.

Correction 1.-
Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit les deux applications suivantes, notées d et tr,

$$\mathrm{d}\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad-bc \end{array}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a+d \end{array}.$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appellera $\mathrm{d}(A)$ le *déterminant* de A et $\mathrm{tr}(A)$ sa *trace*.

1. Propriétés de la trace.

a. On considère deux réels λ, μ et deux matrices

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\lambda M + \mu N) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda a + \mu x & \lambda b + \mu y \\ \lambda c + \mu z & \lambda d + \mu t \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda a + \mu x + \lambda d + \mu t \\ &= \lambda(a+d) + \mu(x+t) \\ &= \lambda \mathrm{tr}(M) + \mu \mathrm{tr}(N) \end{aligned}$$

et tr est bien linéaire.

b. On résout

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker(tr)} &\iff \mathrm{tr}(M) = 0 \\ &\iff d = -a \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on obtient

$$\mathrm{Ker(tr)} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Les trois matrices ci-dessus forment également une famille libre (ce qu'on vérifie en écrivant l'équation de liaison qui se résout de manière triviale) et forme donc une base du noyau de tr qui est donc de dimension 3.

c. Par le théorème du rang, l'image de tr est donc de dimension 1 mais c'est un sous-espace de $\mathbb{R}$ et on a donc $\mathrm{Im(tr)} = \mathbb{R}$; autrement dit l'application *trace* est surjective (mais elle n'est pas du tout injective comme on l'a vu avec son noyau).

d. On fait le calcul explicite. Ce n'est pas difficile, juste un peu désagréable. Notant

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

on a

$$AB = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} xa+yc & xb+yd \\ za+tc & zb+dt \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{tr}(AB) = ax+bz+cy+dt = \mathrm{tr}(BA).$$

e. Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. D'après la question précédente

$$\mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{tr}\left(PP^{-1}A\right) = \mathrm{tr}(A).$$

f. Si A et B sont deux matrices semblables, alors il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. D'après la question précédente, on a donc $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$ ainsi, deux matrices semblables ont bien la même trace.

Pour exhiber un contre-exemple, il faudrait trouver deux matrices avec la même trace qui ne sont pas semblables. On sait que deux matrices semblables ont les mêmes propriétés d'inversibilité. On observe que

$$\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

alors que ces deux matrices ne peuvent être semblables ; la seconde est clairement inversible (mille et une justifications possibles) alors que la première (la matrice nulle) est la matrice la moins inversible du monde. La réciproque est donc fausse.

g. Cette question est vraiment triviale ;

$$\mathrm{tr}\left({}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right) = a+d = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right).$$

2. À propos du déterminant.

a. Le calcul (immédiat) donne $\mathrm{d}(2I) = 4$. Or, $\mathrm{d}(I) = 1$ donc $\mathrm{d}(2I) \neq 2 \times \mathrm{d}(I)$ et d n'est pas linéaire.

b. C'est un calcul. On y va. Notant encore une fois

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

on a d'une part

$$AB = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$$

et il suit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(AB) &= (ax+bz)(cy+dt) - (cx+dz)(ay+bt) \\ &= axcy + axdt + bzcy + bzdt - cxay - cxbt - aydz - dzbt \\ &= axdt + bzcy - cxbt - aydz. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathrm{d}(A)\mathrm{d}(B) = (ad-bc)(xt-yz) = adxt - yzad - bcxy + bcyz.$$

Les quantités sont bien égales, on a bien $\mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(B)$.

c. On suppose que P est une matrice carrée de taille 2 inversible.D'après ce qui précède, on a donc $1 = \mathrm{d}(I) = \mathrm{d}\left(PP^{-1}\right) = \mathrm{d}(P)\,\mathrm{d}\left(P^{-1}\right)$. Ce produit étant non nul, chaque facteur est nécessairement non nul donc $\mathrm{d}(P) \neq 0$. On a même montré que

$$\mathrm{d}\left(P^{-1}\right) = \frac{1}{\mathrm{d}(P)}.$$

d. Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. D'après ce qui précède on peut astucieusement écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P^{-1}AP) &= \mathrm{d}(P^{-1})\mathrm{d}(A)\mathrm{d}(P) \\ &= \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(P^{-1})\mathrm{d}(P) \\ &= \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(P^{-1}P) = \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(I) \\ &= \mathrm{d}(A). \end{aligned}$$

e. Si deux matrices A et B sont semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. D'après la question précédente, on a bien

$$\mathrm{d}(B) = \mathrm{d}(P^{-1}AP) = \mathrm{d}(A)$$

donc deux matrices semblable ont le même déterminant. Concernant la réciproque, on peut utiliser le fait que deux matrices semblables représentent le même endomorphisme donc ont le même rang et donc un noyau de même dimension. Il est alors facile d'exhiber deux matrices dont le déterminant est nul mais qui auront des noyaux de dimensions différentes et qui ne peuvent donc pas être semblables, fournissant ainsi un contre-exemple et niant la réciproque. Par exemple,

$$\mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 = \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

alors que la première a un noyau égal à tout l'espace (donc de dimension 2) et la seconde un noyau de dimension 1 (engendré par le second vecteur de la base canonique).

f. C'est encore un calcul trivial.

$$\mathrm{d}\left({}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc = \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right).$$

3. Dans cette question seulement, on suppose que A est semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
D'après ce qui précède on a donc

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(D) = \lambda_1\lambda_2.$$

4. Dans toute la suite, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par A dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

a. C'est un calcul explicite un peu lourd. observant que f^2 est représenté par A^2, et notant

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

on a, d'une part

$$f^2(u) = A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^2 + bc)x + (ab + bd)y \\ (ca + dc)x + (cb + d^2)y \end{pmatrix}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A)f(u) - \mathrm{d}(A)u &= (a + d)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (ad - bc) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (a + d) \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} - (ad - bc) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a^2 + bc)x + (ab + bd)y \\ (ca + dc)x + (cb + d^2)y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et on a bien l'égalité voulue, à savoir que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,

$$f^2(u) = \mathrm{tr}(A)f(u) - \mathrm{d}(A)u.$$

b. La relation précédente étant vraie pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, elle se traduit par le fait que $f^2 - \mathrm{tr}(A)f + \mathrm{d}(A)\mathrm{id} = 0$ et donc le polynôme $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \mathrm{d}(A)$ annule f (et A).

c. On doit donc montrer que si A vérifie $\mathrm{d}(A) \neq 0$, alors A est inversible. En utilisant la question précédente, on a

$$-A^2 + \mathrm{tr}(A)A = \mathrm{d}(A)I$$

et comme $\mathrm{d}(A) \neq 0$, on peut diviser par $\mathrm{d}(A)$. On factorise à gauche par A pour ainsi avoir

$$A\left(\frac{\mathrm{tr}(A)}{\mathrm{d}(A)}I - \frac{1}{\mathrm{d(A)}A}\right) = I$$

et on peut conclure que A est inversible et même que

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{d}(A)}\left(\mathrm{tr}(A)I - A\right).$$

5. Dans cette question seulement, on suppose que A est **non colinéaire à** I. On introduit

$$w = e_1 + e_2.$$

a. (i) Supposons donc qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $f(e_1) = \lambda_1 e_1$ et $f(e_2) = \lambda_2 e_2$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, f serait représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 I,$$

or A n'est pas colinéaire à I, on a donc nécessairement $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(ii) Supposons qu'on ait simultanément $f(e_1) = \lambda_1 e_1$, $f(e_2) = \lambda_2 e_2$ et $f(w) = \lambda_3 w$, avec λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels (non nécessairement deux à deux distincts). Alors,

$$\begin{aligned} \lambda_3 w &= \lambda_3 e_1 + \lambda_3 e_2 \\ &= f(w) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) \\ &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \end{aligned}$$

ou encore

$$(\lambda_3 - \lambda_1)e_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)e_2 = 0.$$

Mais (e_1, e_2) est une base et donc une famille libre. Nécessairement, on a

$$\lambda_3 - \lambda_1 = 0 \quad \textbf{et} \quad \lambda_3 - \lambda_2 = 0$$

ce qui implique

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3,$$

ce qui n'est pas possible d'après la question précédente et fournit donc la contradiction souhaitée.

b. Si, pour tout x non nul de $\mathbb{R}^2$, on a $(x, f(x))$ liée, alors avec $x = e_1$, puis $x = e_2$ et ensuite $x = w$, on arrive à la situation impossible de la question précédente. Donc, il existe nécessairement un vecteur $x \neq 0$ tel que $(x, f(x))$ soit libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^2$ (car la dimension de $\mathbb{R}^2$ est égale à 2 et on a une famille libre de deux vecteurs).

c. D'après la Question (4a), on sait que

$$f(f(x)) = f^2(x) = -\mathrm{tr}(A)f(x) + \mathrm{d}(A)x.$$

Il suit que

$$M = \mathrm{Mat}(f, (x, f(x))) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}(A) \\ 1 & -\mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

d. Comme M et A représentent le même endomorphisme, on vient de montrer que

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}(A) \\ 1 & -\mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

En appliquant le même raisonnement à ${}^tA$ (qui n'est également pas colinéaire à I si A ne l'est pas car ${}^t(\lambda I) = \lambda I$), on a aussi

$${}^tA \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}({}^tA) \\ 1 & -\mathrm{tr}({}^tA) \end{pmatrix}.$$

Or, $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$ et $d({}^tA) = d(A)$ donc

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}(A) \\ 1 & -\mathrm{tr}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}({}^tA) \\ 1 & -\mathrm{tr}({}^tA) \end{pmatrix} \sim {}^tA$$

et la matrice A est bien semblable à sa transposée ${}^tA$.